

# Пороговые значения амплитуды авторезонансной накачки

О. М. Киселев

20 марта 2013 г.

## Аннотация

Показано, что устойчивые авторезонансные решения для уравнения главного резонанса существуют для уравнений с убывающей амплитудой возмущающей силы. Причем, авторезонансное решение имеет порядок  $\sqrt{t}$  и в основном не зависит от амплитуды возмущающей силы. Указан диапазон зависимости возмущающей силы от времени, для которого существуют такие авторезонансные решения.

## Введение

Уравнение главного резонанса

$$i\Psi + (|\Psi|^2 - t)\Psi = f \quad (1)$$

имеет два типа решений. Решения первого типа – ограниченные с квадратично растущей частотой осцилляций. Решения второго типа – растущие как  $\sqrt{t}$ . Растущие решения называются авторезонансными.

Уравнение главного резонанса определяет модуляцию амплитуды нелинейных колебаний для возмущенной системы с медленно меняющейся частотой. Авторезонансные решения соответствуют захвату в нелинейный резонанс с малой осциллирующей внешней силой и линейно меняющейся частотой колебаний. Параметр  $f$  в (1) определяет амплитуду внешней силы. Многочисленные приложения уравнения главного резонанса можно найти, например, в работе [1]. Пороговые значения параметра для авторезонанса обсуждались в работах L. Friedland, см. например, [2]. С точки зрения асимптотик анализ порогового значения внешней силы проведен, например, для системы двух связанных осцилляторов в работе [3]. Временные асимптотики авторезонансных решений рассматривались в обзоре [4].

В предлагаемой работе обсуждаются пороговые значения для амплитуды с точки зрения зависимости амплитуды от времени. Новым и неожиданным, по крайней мере для автора, является наблюдение, что устойчивое авторезонансное решение существует при убывающих амплитудах возмущения уравнения нелинейных колебаний.

Оказывается, что при  $t \rightarrow \infty$  существуют устойчивые по Ляпунову авторезонансные решения с амплитудой внешней силы вида  $f = f_1 t^{2\lambda}$ , где  $f_1 = \text{const}$ ,  $-1/4 < \lambda < 3/4$ . Такое поведение захваченных в резонанс решений существенно отличается от хорошо известного линейного резонанса, при котором амплитуда резонансного решения пропорциональна интегралу от амплитуды возмущающей силы.

## 1 Авторезонасное решение

Уравнение (1) удобно преобразовать к виду, в котором явно выделена растущая часть решения. Для этого сделаем замену:

$$\Psi = \sqrt{t} e^{-it^2/2} \psi.$$

В результате подстановки получим:

$$i\sqrt{t} e^{-it^2/2} \psi' + i\frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-it^2/2} \psi + t^{3/2} |\psi|^2 \psi = f.$$

Здесь удобно ввести новую переменную:  $\tau = t^2/2$  и принять, что  $\psi = \psi(\tau)$ . Тогда уравнение главного резонанса примет вид:

$$i\psi' + |\psi|^2 \psi = \frac{1}{(2\tau)^{3/4}} f e^{i\tau} - \frac{i}{4\tau} \psi. \quad (2)$$

Задача состоит в том, чтобы построить ограниченное решение этого уравнения при  $\tau \rightarrow \infty$

Если пренебречь поправочными членами, то при  $\tau \rightarrow \infty$  в главном получится уравнение:

$$i\psi'_0 + |\psi_0|^2 \psi_0 = 0. \quad (3)$$

Общее решение этого уравнения  $\psi_0 = R e^{iR^2\tau + ia}$ . Это решение содержит два вещественных параметра  $R, a$ .

В ситуации общего положения решения уравнения (1) с главным членом  $\psi_0$  убывают. Это убывание можно объяснить, воспользовавшись уравнением для параметра  $R^2$ . Действительно, продифференцируем  $|\psi|^2$  в силу уравнения (1):

$$\frac{d|\psi|^2}{d\tau} = \bar{\psi} \left( -\frac{i}{(2\tau)^{3/4}} f e^{i\tau} - \frac{\psi}{4\tau} \right) + \psi \left( \frac{i}{(2\tau)^{3/4}} \bar{f} e^{-i\tau} - \frac{\bar{\psi}}{4\tau} \right).$$

Это выражение удобно переписать в виде:

$$\frac{d|\psi|^2}{d\tau} = \frac{i}{(2\tau)^{3/4}} (\bar{f}\psi e^{-i\tau} - f\bar{\psi} e^{i\tau}) - \frac{|\psi|^2}{2\tau}. \quad (4)$$

Мы будем считать, что  $f$  – неосциллирующая функция  $\tau$ . Для случая  $\arg(\psi) - i\tau \gg 1$  получим усредненное уравнение:

$$|\tilde{\psi}|^2 \sim \frac{R_0^2}{\sqrt{\tau}}, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad R_0 = \text{const}.$$

Усредненное уравнение непригодно при  $\arg(\psi) \sim i\tau$ . Следовательно, решения с неубывающей амплитудой можно искать как возмущение решения уравнения (3) вблизи  $R \sim 1$ .

## 2 Асимптотическая подстановка

Примем  $f = \sqrt[4]{2^3} \mathcal{F} \tau^\lambda$ , где  $\mathcal{F} \in \mathbf{R}$ . Будем искать решение в виде:

$$\psi = (1 + \rho) e^{i(\tau + \alpha)}. \quad (5)$$

Подставим эту формулу в исходное уравнение (1), сократим правую и левую части на множитель  $e^{i(\tau+\alpha)}$ . Тогда для вещественной и мнимой частей получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\alpha'(1+\rho) - (1+\rho) + (1+\rho)^3 &= \mathcal{F}\tau^{-A} \cos(\alpha), \\ \rho' &= \mathcal{F}\tau^{-A} \sin(\alpha) - \frac{1+\rho}{4\tau}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $A = 3/4 - \lambda$ .

Для построения убывающего при  $\tau \rightarrow \infty$  решения этой системы уравнений сделаем замену:

$$\rho = \tau^{-\kappa} r(\tau), \quad \alpha = \alpha_0 + \tau^{-\mu} a(\tau), \quad \alpha_0 = \pi n, \quad n = 0, 1.$$

Здесь  $r(\tau)$  и  $a(\tau)$  в свою очередь некоторые ряды по обратным степеням  $\tau$ . Такая замена удобна для определения главных членов асимптотики и асимптотической последовательности. Подстановка этих формул дает:

$$\begin{aligned} \mu\tau^{-\mu-1}a + \tau^{-\mu}a' + 2\tau^{-\kappa}r &\sim (-1)^n \mathcal{F}\tau^{-A}, \\ -\kappa\tau^{-\kappa-1}r + \tau^{-\kappa}r' &\sim (-1)^n \mathcal{F}\tau^{-A-\mu}a - \tau^{-1}/4. \end{aligned}$$

Тогда в главном получим асимптотическую формулу:

$$r \sim (-1)^n \mathcal{F}/2, \quad a \sim (-1)^n/(4\mathcal{F}), \quad \kappa = A, \quad \mu = 1 - A.$$

Исходя из вида системы уравнений для  $\rho$  и  $\alpha$  и полученных выражений для главных членов, можно показать, что справедливо утверждение:

**Теорема 1** *Асимптотика при  $\tau \rightarrow \infty$  частного убывающего решения  $(\alpha_*, \rho_*)$  имеет вид:*

$$\begin{aligned} \alpha_* &\sim \alpha_0 + \tau^{A-1} \sum_{m,l=0}^{\infty} \tau^{-\chi_{m,l}} a_{m,l}, \quad \rho_* \sim \tau^{-A} \sum_{m,l=0}^{\infty} \tau^{-\chi_{m,l}} r_{m,l}, \\ \alpha_0 &= \pi n, \quad n = 0, 1 \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\chi_{m,n} = An + (1-A)m$ .

Коэффициенты асимптотических разложений получаются из рекуррентной системы уравнений. Существование решения с приведенной асимптотикой следует из теоремы Кузнецова [5].

**Следствие.** Авторезонансные решения вида (7) существуют для  $f = f_1 t^{2\lambda}$  при  $-1/4 < \lambda < 3/4$ , где  $f_1 = \text{const}$ .

### 3 Устойчивость авторезонансного решения

Для исследования устойчивости авторезонансного решения с асимптотикой (7) сделаем замену переменных

$$\rho = p + \rho_*, \quad \alpha = \alpha_* + q.$$

Здесь  $p$  и  $q$  – решения однородной системы уравнений:

$$\begin{aligned} -\alpha'_* p - q'(1 + p + \rho_*) - p + 3(1 + \rho_*)p^2 + 3(1 + \rho_*)^2 p + p^3 = \\ \mathcal{F}\tau^A \cos(\alpha_* + q)(-1)^n, \\ p' = \mathcal{F}\tau^{-A}(\sin(\alpha_* + q) - \sin(\alpha_*)) - \frac{p}{4\tau}. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим положительно определённую функцию:

$$L = \mathcal{F}\tau^{-A}q^2 + p^2.$$

Продифференцируем функцию  $L$  в силу системы уравнений (8). Затем вместо решения  $(a_*, \rho_*)$  подставим его асимптотику при  $\tau \rightarrow \infty$ , в результате для  $\alpha_0 = \pi$ , то есть  $n = 1$ , получим:

$$\frac{dL}{d\tau} = -\frac{p^2}{4\tau} + o((p^2 + q^2)\tau^{-1}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Следовательно, при достаточно малых значениях  $p$  и  $q$  и достаточно больших значениях  $\tau$   $L(p, q)$  является функцией Ляпунова. Утверждение об устойчивости по Ляпунову для авторезонанса при  $f = \text{const}$  см. в учебном пособии автора 2006 года [6], с.131. Близкие результаты для  $f = \text{const}$  см. в [7, 8].

**Теорема 2** *Решение  $(\alpha_*, \rho_*)$  при  $n = 1$  устойчиво по Ляпунову при достаточно больших  $\tau$ .*

## 4 Захват в резонанс

Рассмотрим захват в резонанс решений уравнения (1) при больших значениях  $|\Psi|$ . Для этого в духе работы [9] перейдем к нормализованной системе уравнений. Сделаем замены неизвестной функции и переменных:

$$\Psi = \varepsilon^{-1}(1 + \varepsilon^{-2\lambda+3/2}\rho)e^\alpha, \quad \rho = \rho(s), \quad \alpha = \alpha(s), \quad \varepsilon^2 t = (1 + \varepsilon^{2\lambda+5/2}s).$$

Удобно переобозначить  $\delta = \varepsilon^{3/2-2\lambda}$ , тогда параметр  $\delta \ll 1$  в рассматриваемом интервале значений  $-1/4 < \lambda < 3/4$ .

Тогда в терминах новой переменной  $s$  получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{ds} &= (1 + \delta\varepsilon^{1+4\lambda}s)^{2\lambda} \mathcal{F} \sin(\alpha), \\ \frac{d\alpha}{ds} &= 2\rho + \varepsilon^{1+4\lambda}s + \delta \left( \rho^2 - (1 + \delta\varepsilon^{1+4\lambda}s)^{2\lambda} \frac{\mathcal{F} \sin(\alpha)}{1 + \delta\rho} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Эта система определяет поведение решений в окрестности захвата в резонанс [9].

В главном по  $\delta$  порядке эта система уравнений соответствует полученному в [10] уравнению математического маятника с внешним моментом:

$$\alpha'' - \mathcal{F} \sin(\alpha) - \varepsilon^{1+4\lambda} \sim 0. \quad (10)$$

В терминах уравнения (10) захваченные решения соответствуют траекториям внутри петель сепаратрис на фазовом портрете. Такие траектории для уравнения (10) существуют в рассматриваемом интервале  $\lambda$ .

Для анализа захвата в резонанс следует рассмотреть полную систему (9). Результаты [9] дают значения параметров для захватываемых траекторий.

## Список литературы

- [1] Fajans J., Friedland L., Autoresonant (non-stationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators. 2001, Amer.J. Phys. v.69, n.10, pp.1096-1102.
- [2] Lazar Friedland, Autoresonance in nonlinear systems. doi:10.4249/scholarpedia.5473
- [3] Glebov, S.G.; Kiselev, O.M.; Lazarev, V.A. The autoresonance threshold in a system of weakly coupled oscillators. (English. Russian original) Proc. Steklov Inst. Math. 259, Suppl. 2, S111-S123 (2007); translation from Tr. Inst. Mat. Mekh. (Ekaterinburg) 13, No. 2 (2007). MSC2000: \*70-99. См. также [arxiv.org/abs/0707.2311](https://arxiv.org/abs/0707.2311)
- [4] Л. А. Калякин, Асимптотический анализ моделей авторезонанса, УМН, 63:5(383) (2008), 3–72
- [5] А.Н. Кузнецов, Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений. Функциональный анализ, 1972, т.6, вып.2, стр. 41-51.
- [6] О.М. Киселев, Лекции по теории нелинейных колебаний, Уфа, БашГУ, 2006, 136 с.
- [7] О. А.Султанов, Функции Ляпунова для неавтономных систем близких к гамильтоновым. Уфимский матем. журнал, 2010, т.2, п4, стр.88-97.
- [8] Л.А. Калякин, О.А. Султанов, Устойчивость моделей авторезонанса. Дифференциальные уравнения. 2012, т.48, п10.
- [9] Oleg Kiselev, and Nikolai Tarkhanov, Scattering of autoresonance trajectories upon a separatrix Preprint Institut fur Mathematik Universitat Potsdam, November 10, 2011.
- [10] Б.В. Чириков. Резонансные процессы в магнитных ловушках. Атомная энергия №6, 1959, с.630-638.